## Analysis

- Ableitung
- Ableitungsregeln
- totale und partielle Ableitung
- Extremwertbestimmung
- Integrale
- partielle Integration
- Substitution der Variablen
- Koordinatentransformationen
- Differentialgleichungen

## Lineare Algebra

- Matrizen und Determinanten
- Rechenregeln hierfür
- Lösungsalgorithmen für lineare Gleichungssysteme
- Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen
- komplexe Zahlen

# Aufgaben

- Berechnen Sie
  - $\frac{\mathrm{d}(2t+2)^4\sqrt{1+t^2}}{\mathrm{d}t}$,
  - $g'(u)$ mit $g(u) = \frac{u+\cos u}{u-\sin u}$,
  - $\frac{\mathrm{d}^n\,\mathrm{e}^{ikx}}{\mathrm{d}x^n}$.
- Bestimmen Sie die folgenden Integrale:
  - $\int \ln y \, \mathrm{d}y$
  - $\int x\,\mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x$
  - $\int (ax+b)^n \, \mathrm{d}x$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $n > 0$).
- Berechnen Sie das Integral $\iiint_G \exp(\sqrt{x^2+y^2+z^2}^3)\,\mathrm{d}\tau$, wobei die $G$ die Einheitskugel $G = \left\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2 \leq 1\right\}$ sei.

# Aufgaben

- Gesucht ist eine Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k \cdot (a - y(t))$$

  mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0$ ($a = \mathrm{const}$).
- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

## Definition (Vektorraum)

Eine Menge $\mathbb{V} = \left\{ \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots \right\}$ heißt *Vektorraum* über einem Körper $\mathbb{K}$, wenn eine innere Verknüpfung $\oplus$ von Elementen aus $\mathbb{V}$ (Vektoraddition) und eine Vervielfachung $\odot$ von Elementen aus $\mathbb{V}$ mit Elementen aus $\mathbb{K}$ (Skalarmultiplikation) erklärt sind und dabei folgende Regeln gelten:

1. Assoziativität: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{V} : (\vec{a} \oplus \vec{b}) \oplus \vec{c} = \vec{a} \oplus (\vec{b} \oplus \vec{c})$
2. Kommutativität: $\forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V} : \vec{a} \oplus \vec{b} = \vec{b} \oplus \vec{a}$
3. neutrales Element: $\exists \vec{0} \in \mathbb{V} \forall \vec{a} \in \mathbb{V} : \vec{0} \oplus \vec{a} = \vec{a} \oplus \vec{0} = \vec{a}$
4. entgegengesetztes Element:
   $\forall \vec{a} \in \mathbb{V} \exists (-\vec{a}) \in \mathbb{V} : \vec{a} \oplus (-\vec{a}) = (-\vec{a}) \oplus \vec{a} = \vec{0}$
5. Distributivität I: $\forall \alpha \in \mathbb{K} \forall \vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V} : \alpha \odot (\vec{a} \oplus \vec{b}) = \alpha \odot \vec{a} \oplus \alpha \odot \vec{b}$
6. Distributivität II: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall \vec{a} \in \mathbb{V} : (\alpha + \beta) \odot (\vec{a} = \alpha \odot \vec{a} \oplus \beta \odot \vec{a}$
7. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K} \forall \vec{a} \in \mathbb{V} : (\alpha \cdot \beta) \odot (\vec{a} = \alpha \odot (\beta \odot \vec{a})$
8. Neutralität des Einselementes: $1 \in \mathbb{K}$: $\forall \vec{a} \in \mathbb{V} : 1 \odot \vec{a} = \vec{a}$

# Häufig benutzte Vektorräume

## Beispiel

- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$
- $\mathbb{R}_3$
- $\mathbb{R}_n$, $\mathbb{C}_n$

## Beispiel (Funktionenräume)

- Menge von Funktionen mit demselben Definitionsbereich
- Funktionen kann man addieren
- und mit Zahlen vervielfachen
- $C^k[\![a,b]\!]$, $C^k(\mathbb{R})$, $\mathcal{L}^2(\mathbb{R})$,...

# Skalarprodukt

- ordnet zwei Vektoren (Elementen des Vektorraumes) eine Zahl zu ($\vec{a} \cdot \vec{b}$ oder $\left\langle \vec{a} \middle| \vec{b} \right\rangle$)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$$

- genügt bestimmten Rechenregeln
- positiv definite symmetrische Bilinearform
- (im Komplexen positiv definite hermitesche Sesquilinearform)
- Skalarprodukt induziert eine Norm
- Längen- und Winkelmessung
- Orthogonalität von Vektoren

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

# Basis

- Vektoren des Vektorraumes sind eindeutig als Linearkombination der Basisvektoren darstellbar

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\vec{e}_k$$

- Koordinaten $\{ a_k \}$
- (minimales) Erzeugendensystem
- (maximales) linear unabhängiges System
- Zahl der Basisvektoren=Dimension des Vektorraumes
- häufig Orthonormalbasis (paarweise orthogonal und normiert)

$$\langle \vec{e}_i \,|\, \vec{e}_j \rangle = \delta_{ij}$$

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

# Abbildungen

- ordnen einem Vektor $\vec{a}$ einen Vektor $\vec{a}'$ zu
- Ergebnis kann aus dem gleichen oder einem anderen Vektorraum sein
- Abbildung $f : \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ heißt linear, wenn

$$f(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}) = \alpha f(\vec{a}) + \beta f(\vec{b})$$

  für beliebiege Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{V}$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ gilt.
- existiert die Umkehrabbildung, spricht man von *Isomorphismus*
- eindeutig bestimmt durch die Wirkung auf die Basis
- im $\mathbb{R}_n$ durch Matrizen dargestellt

# Unendliche Basis?

- Ist das Konzept des $\mathbb{R}_n$ (oder $\mathbb{C}_n$) auf $n = \infty$ erweiterbar?
- Spaltenvektor mit unendlich vielen Zeilen (=Einträgen)
- im Prinzip eine Zahlenfolge
- Problem Skalarprodukt (Konvergenz)
- Ausweg:

$$\ell^2 = \left\{ (x_k)_{k=1}^{\infty} \;\middle|\; x_k \in \mathbb{C} \wedge \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty \right\}$$

- Skalarprodukt: $\langle x \,|\, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k^* y_k$

# Hilbertraum

## Definition (Hilbertraum)

Der Hilbertraum ist ein

- linearer *komplexer* Vektorraum
- von *abzählbar unendlicher* Dimension
- mit einem *Skalarprodukt*,
- der *vollständig*
- und *separabel* ist.

# Rechnen im Hilbertraum

- Übernahme der Konzepte des endlichen Vektorraumes
- linearer, komplexer Vektorraum
- (komplexwertiges) Skalarprodukt
- Norm
- Darstellung als Linearkombination von (linear unabhängigen) Basiselementen
- ONB
- Dimension abzählbar unendlich
- Vollständigkeit der Basis
- Koordinaten

# Rechnen im Hilbertraum

- (lineare) Operator $\hat{A}$ (=lineare Abbildung)

$$\hat{A}\left(\alpha\left|x\right\rangle + \beta\left|y\right\rangle\right) = \alpha\hat{A}\left|x\right\rangle + \beta\hat{A}\left|y\right\rangle$$

- Matrixdarstellung von Operatoren
- *hermitesch adjungierter* Operator $\hat{A}^+$: $\left\langle x \middle| \hat{A}y \right\rangle = \left\langle y \middle| \hat{A}^+x \right\rangle^*$
- Nacheinanderausführen von Operatoren (=Produkt) i. a. **nicht** kommutativ
- *hermitesche* Operatoren: $\hat{A}^+ = \hat{A}$
- Eigenwertproblem für hermitesche Operatoren

$$\hat{A}\left|a\right\rangle = a\left|a\right\rangle$$

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA

# Wellenfunktionen

- QM traditionell häufiger als *Wellenmechanik* als als *Matrizenmechanik*
- beide Darstellungen sind äquivalent
- Begriff der Wellenfunktion
- $\mathcal{L}^2(\Omega) := \left\{ \psi : \Omega \to \mathbb{C} \;\middle|\; \int_\Omega |\psi|^2 \,\mathrm{d}\tau < \infty \right\}$
- isometrisch-isomorph zum $\ell^2$
- Wir verwenden statt der abstrakten, allgemeinen Schreibweise $|\psi\rangle$ die sogenannte *Ortsdarstellung* $\psi(x)$.
- Skalarprodukt:

$$\langle \psi \,|\, \phi \rangle = \int_\Omega \psi^* \phi \,\mathrm{d}\tau$$

- also z. B. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$

# Wellenfunktionen

- quadratisch-integrable Funktionen ($\equiv$ Vektoren)
- müssen meist $2\times$ stetig diff'b. sein
- Skalarprodukt (=Integral) und Norm
- Darstellung durch Basis: $\psi = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\phi_k$
- lineare Operatoren (z. B. Differentialoperatoren) machen aus einer Funktion eine neue
- Matrixdarstellung eines Operators $\hat{A}$ (abhängig von der Basis $\{\phi_j\}$)

$$A_{jk} = \int \phi_j \hat{A} \phi_k \, \mathrm{d}\tau$$

- hermitesche (=selbstadjungierte) Operatoren
- EWG (=DGL) für den Operator $\hat{A}$: $\hat{A}\psi = a \cdot \psi$

FRIEDRICH-SCHILLER-UNIVERSITÄT JENA